

Podobnosť

1. Podobnosť geometrických útvarov

Dva útvary sú podobné, ak pomer dĺžok **všetkých dvojíc** prislúchajúcich si úsečiek týchto útvarov sa rovná tomu istému **číslu k** . Nazýva sa pomer (koeficient) podobnosti. $k = |A'B'| : |AB|$
Zapisujeme: $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$

Ak pre **pomer (koeficient)** podobnosti platí:

$$0 < k < 1$$

obraz je menší ako vzor, ide o **zmenšenie**



$$k = 1$$

obraz je zhodný so vzorom, ide o **zhodnosť**



$$k > 1$$

obraz je väčší ako vzor, ide o **zväčšenie**



Zväčšovaním alebo zmenšovaním útvaru vzniká podobný útvar, ktorý si **zachováva** svoj **tvar** (pomer strán a zhodnosť uhlov). Podobné sú napríklad každé dva štvorce, každé dve kružnice, každé dva rovnostranné trojuholníky, každé dva pravidelné 5 – uholníky, 6 – uholníky ...

Úloha na pripomenutie

- a) Daná je úsečka AB, ktorej dĺžka je 9 cm. Zmeň jej dĺžku v pomere $k = 4 : 3$.

Riešenie: 4 : 3 znamená, že sa útvar zväčší ($4 > 3$). $9 : 3 \cdot 4 = \underline{12 \text{ cm}}$

- b) Zmeň číslo 24 v pomere $k = 2 : 3$.

Riešenie: 2 : 3 znamená, že sa útvar zmenší ($2 < 3$). $24 : 3 \cdot 2 = \underline{16 \text{ cm}}$



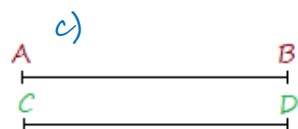
1. Model autíčka má rozmery: dĺžka – 179 mm, šírka – 58 mm a výška – 70 mm. Vypočítaj rozmery skutočného automobilu v m, keď vieš, že model bol vyrobený v pomere podobnosti $k = 1 : 43$.

2. Štvorec ABCD a kosoštvorec EFGH sa zhodujú vo všetkých stranách. Sú tieto útvary podobné? Svoje tvrdenie zdôvodni. (obr.)

3. Štvorec ABCD a obdĺžnik KLMN sa zhodujú vo všetkých uhloch. Sú tieto útvary podobné? Svoje tvrdenie zdôvodni. (obr.)

4. Starožitné zrkadlo má tvar obdĺžnika 0,8 m x 1,2 m, jeho rám je široký 22 cm. Sú vnútorné a vonkajšie okraje rámu podobné obdĺžniky?

5. Na obrázku sú nakreslené úsečky AB a CD. Odmeraj úsečky a vypočítaj koeficient podobnosti $k = |CD| : |AB|$.



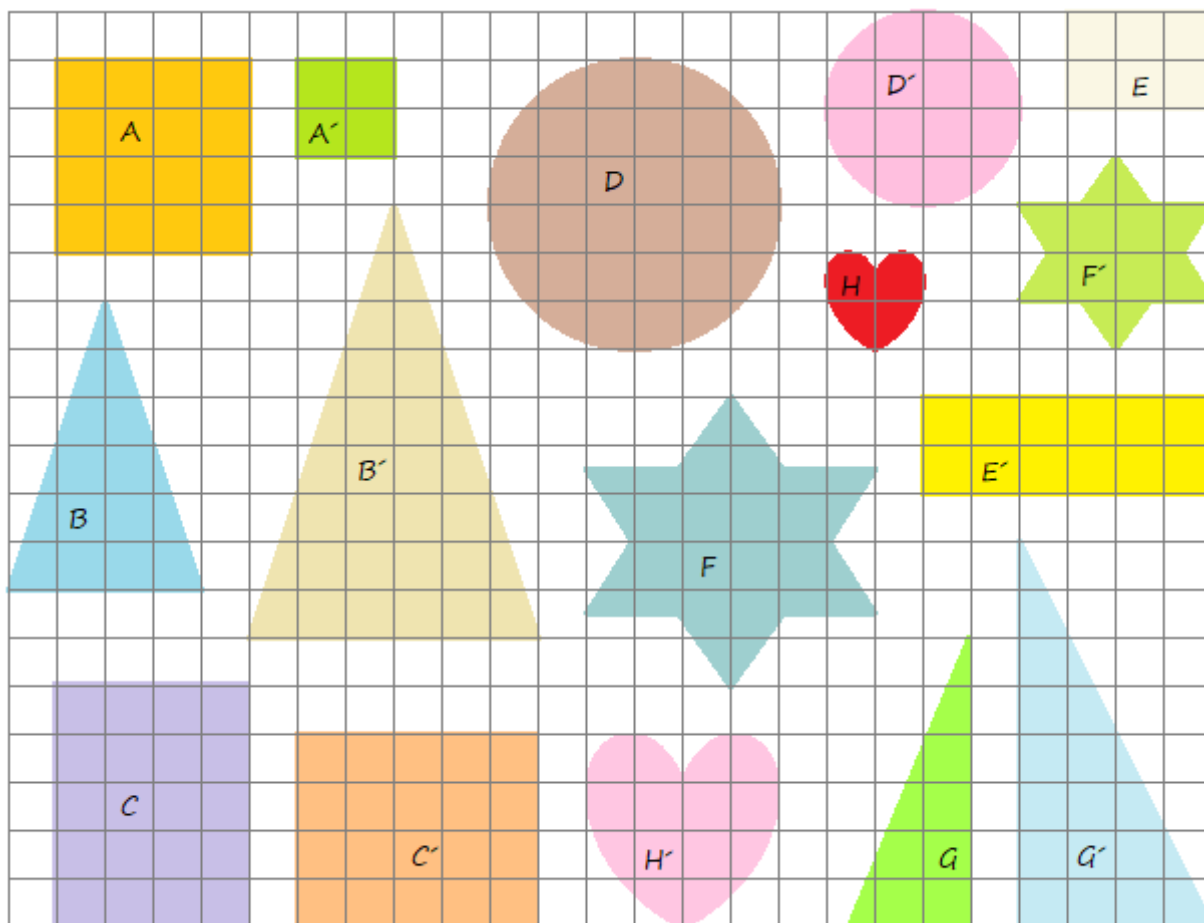
6. Uhol $\varphi = 85^\circ$. Aká bude jeho veľkosť, ak sa naň pozrieme lupou s trojnásobným zväčšením? (načrtni si obrázok)
7. Nákladný vagón má dĺžku 22 m. Aký dlhý bude jeho model v cm v mierke 1 : 120?
8. Označ správnu odpoveď. Nesprávne odpovede oprav a zdôvodni.
- a) Každé dva štvorce sú podobné.
 - b) Každé dva obdĺžniky sú podobné.
 - c) Každé dva kosoštvorce sú podobné.
 - d) Každé dva kosodĺžniky sú podobné.
 - e) Každé dva kruhy sú podobné.
 - f) Každé dva rovnostranné trojuholníky sú podobné.
 - g) Každé dva pravouhlé trojuholníky sú podobné.
 - h) Každé dva rovnoramenné trojuholníky sú podobné.

9. Zisti, ktoré dva obdĺžniky sú podobné, ak je daná ich dĺžka (a) a šírka (b).

a) $a = 6 \text{ cm}, b = 8 \text{ cm}$ **Riešenie:** $a' : a = 9 : 6 = 3 : 2 = k_1$ (koeficient podobnosti)
 $a' = 9 \text{ cm}, b' = 12 \text{ cm}$ $b' : b = 12 : 8 = 3 : 2 = k_2$ (upravíme na zákl. tvar)
 $k_1 = k_2 \Rightarrow$ obdĺžniky sú podobné

b) $a = 10 \text{ cm}, b = 12 \text{ cm}$ c) $a = 5 \text{ cm}, b = 7 \text{ cm}$ d) $a = 1 \text{ cm}, b = 2 \text{ cm}$
 $a' = 6 \text{ cm}, b' = 8 \text{ cm}$ $a' = 12,5 \text{ cm}, b' = 17,5 \text{ cm}$ $a' = 4 \text{ cm}, b' = 2 \text{ cm}$

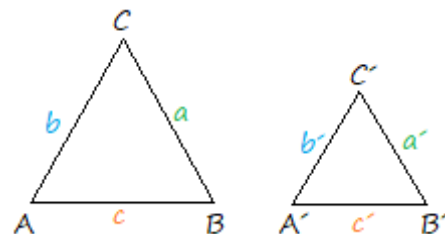
10. Urči koeficient podobnosti **k** dvoch podobných útvarov (jedna dvojica nie je podobnosť, nájdi ju). Zapiš, či ide o zväčšenie alebo zmenšenie. (príklad: **A** – vzor, **A'** – obraz, **dodrž poradie!**)



11. Podobnosť trojuholníkov

Dva trojuholníky ABC a A'B'C' sú **podobné podľa vety SSS**, ak sa pomery dĺžok každých dvoch prislúchajúcich si strán **rovnajú**. $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$

$$k = |A'B'| : |AB| = |B'C'| : |BC| = |A'C'| : |AC|$$



1. Pre strany v trojuholníku KLM platí: $k = 5 \text{ cm}$, $l = 4,2 \text{ cm}$, $m = 7 \text{ cm}$.
Pre strany v trojuholníku EFG platí: $e = 12,5 \text{ cm}$, $f = 10,5 \text{ cm}$, $g = 17,5 \text{ cm}$.

a) Sú trojuholníky KLM a EFG podobné?

Riešenie: Ak majú byť trojuholníky podobné, musia byť čísla v druhom trojuholníku rovnakými násobkami čísel v prvom trojuholníku. Zistíme pomery dĺžok odpovedajúcich si strán. (v pomere uvedieme ako prvú stranu 2. trojuholníka)
 $e/k = 12,5 : 5 = 5 : 2$, $f/l = 10,5 : 4,2 = 5 : 2$, $g/m = 17,5 : 7 = 5 : 2 \Rightarrow$ sú podobné

b) Vypočítaj koeficient podobnosti týchto trojuholníkov, ak sú podobné.

Riešenie: $k = 5 : 2 = 2,5$, ide o zväčšenie $\Rightarrow \Delta EFG$ je 2,5 – krát väčší ako ΔKLM

c) Vypočítaj dĺžky strán trojuholníka ABC, ak platí: $\Delta KLM \sim \Delta ABC$, a koeficient podobnosti je 1 : 2.

Riešenie: ak $k = 1 : 2 \Rightarrow \Delta ABC$ má polovičné dĺžky strán ako ΔKLM

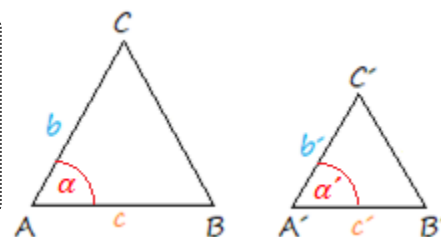
$$a = 2,5 \text{ cm}, b = 2,1 \text{ cm}, c = 3,5 \text{ cm}$$

2. V tabuľke sú rozmery strán piatich trojuholníkov. Zisti, ktoré z týchto trojuholníkov sú podobné a urči koeficient ich podobnosti.

ΔABC	ΔDEF	ΔGHI	ΔJKL	ΔMNO
$a = 96 \text{ cm}$	$d = 20 \text{ cm}$	$g = 6 \text{ dm}$	$j = 48 \text{ cm}$	$m = 40 \text{ cm}$
$b = 156 \text{ cm}$	$e = 35 \text{ cm}$	$h = 105 \text{ cm}$	$k = 78 \text{ cm}$	$n = 700 \text{ mm}$
$c = 168 \text{ cm}$	$f = 30 \text{ cm}$	$i = 9 \text{ dm}$	$l = 84 \text{ cm}$	$o = 6 \text{ dm}$

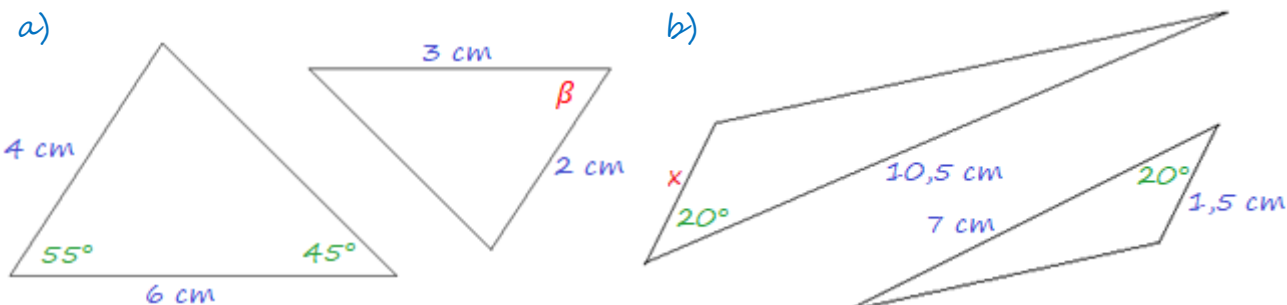
Dva trojuholníky ABC a A'B'C' sú **podobné podľa vety SUS**, ak sú **zhodné** pomery dĺžok dvoch dvojíc prislúchajúcich si strán a trojuholníky sa zhodujú v uhle, ktorý tieto strany zvierajú. $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$

$$k = |A'B'| : |AB| = |A'C'| : |AC|, |\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle B'A'C'|$$



3. Urč chýbajúce údaje v podobných trojuholníkoch.

Riešenie a) Ak sú trojuholníky podobné a koeficient podobnosti $k = 3 : 6 = 2 : 4 = 1 : 2$, tak potom musí byť uhol, ktorý zvierajú strany 4 a 6 rovnaký ako uhol, ktorý zvierajú strany 3 a 2, to znamená $\beta = 55^\circ$. Tretí uhol dopočítame do 180° - to znamená: 80° .



4. V tabuľke sú rozmery strán piatich trojuholníkov. Zisti, ktoré z týchto trojuholníkov sú podobné a urči koeficient ich podobnosti. (trojuholníky si načrtni)

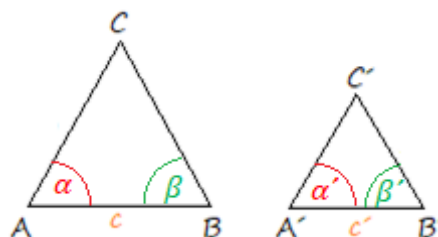
ΔABC	ΔDEF	ΔGHI	ΔJKL	ΔMNO
$a = 42 \text{ cm}$	$d = 27 \text{ dm}$	$g = 6 \text{ dm}$	$j = 504 \text{ mm}$	$m = 3 \text{ cm}$
$b = 54 \text{ cm}$	$e = 210 \text{ cm}$	$h = 8 \text{ dm}$	$k = 64,8 \text{ cm}$	$n = 4 \text{ cm}$
$ \angle BCA = 28^\circ$	$ \angle EFD = 28^\circ$	$ \angle HIG = 90^\circ$	$ \angle JLK = 28^\circ$	$ \angle MON = 90^\circ$

Dva trojuholníky ABC a A'B'C' sú **podobné podľa vety UU**, ak sa **zhodujú** v dvoch vnútorných uhloch. Podobnosť zachováva veľkosť uhlov.

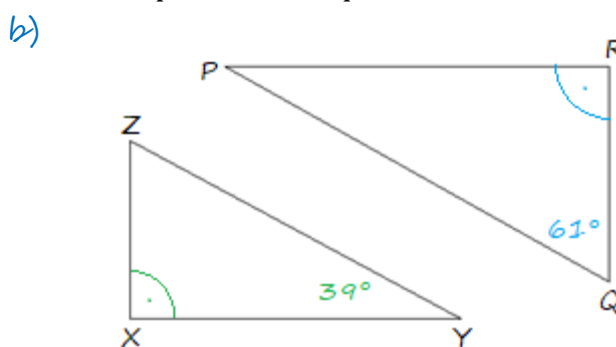
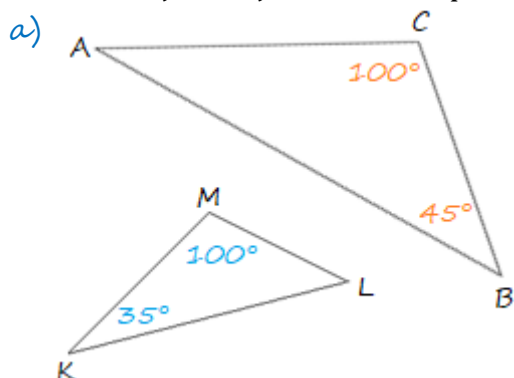
$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$

$|\angle BAC| = |\angle B'A'C'|$, $|\angle ABC| = |\angle A'B'C'|$

Dôsledok: Každé dva **pravouhlé** trojuholníky, ktoré sa zhodujú v jednom ostrom uhle sú podobné.



5. Zisti, či dvojice trojuholníkov sú podobné. Ak áno, podobnosť zapíš.



Dôsledok viet SSS, SUS a UU pre podobnosť trojuholníkov: Dva trojuholníky sú podobné, ak majú rovnaký pomer dĺžok odpovedajúcich si strán a zhodné odpovedajúce si uhly.

6. Vyber jednu správnu odpoveď. Trojuholník s veľkosťami vnútorných uhlov 21° a 89° je podobný s trojuholníkom, ktorý má veľkosť vnútorných uhlov:

A 80° a 89°

B 21° a 70°

C 89° a 90°

D 21° a 80°

7. Daný je trojuholník ABC, ktorého strany majú dĺžku $a = 4,5 \text{ cm}$, $b = 3 \text{ cm}$, $c = 6 \text{ cm}$. Uhly trojuholníka označme α, β, γ . Zostroj trojuholník A'B'C' tak, aby platilo $b' = 3/4 b$, $\alpha = \alpha', \gamma = \gamma'$. Sú trojuholníky ABC a A'B'C' podobné? Zdôvodni.

8. Pravouhlý trojuholník XYZ so stranami dĺžky 3 cm, 4 cm a 5 cm je podobný s trojuholníkom X'Y'Z' s koeficientom podobnosti 3.

a) Vypočítaj obvody oboch trojuholníkov a zisti ich pomer.

b) Vypočítaj obsahy oboch trojuholníkov a zisti ich pomer.

9. Na obrázku nájdí dva podobné trojuholníky s koeficientom podobnosti:

a) 2

e) $3/2$

i) $4/3$

b) $1/2$

f) 4

j) $3/5$

c) 3

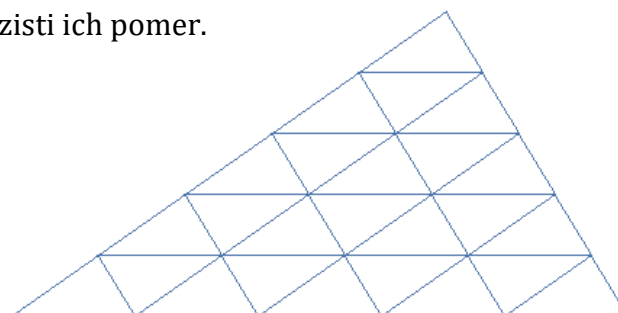
g) $2/3$

k) 1

d) $1/3$

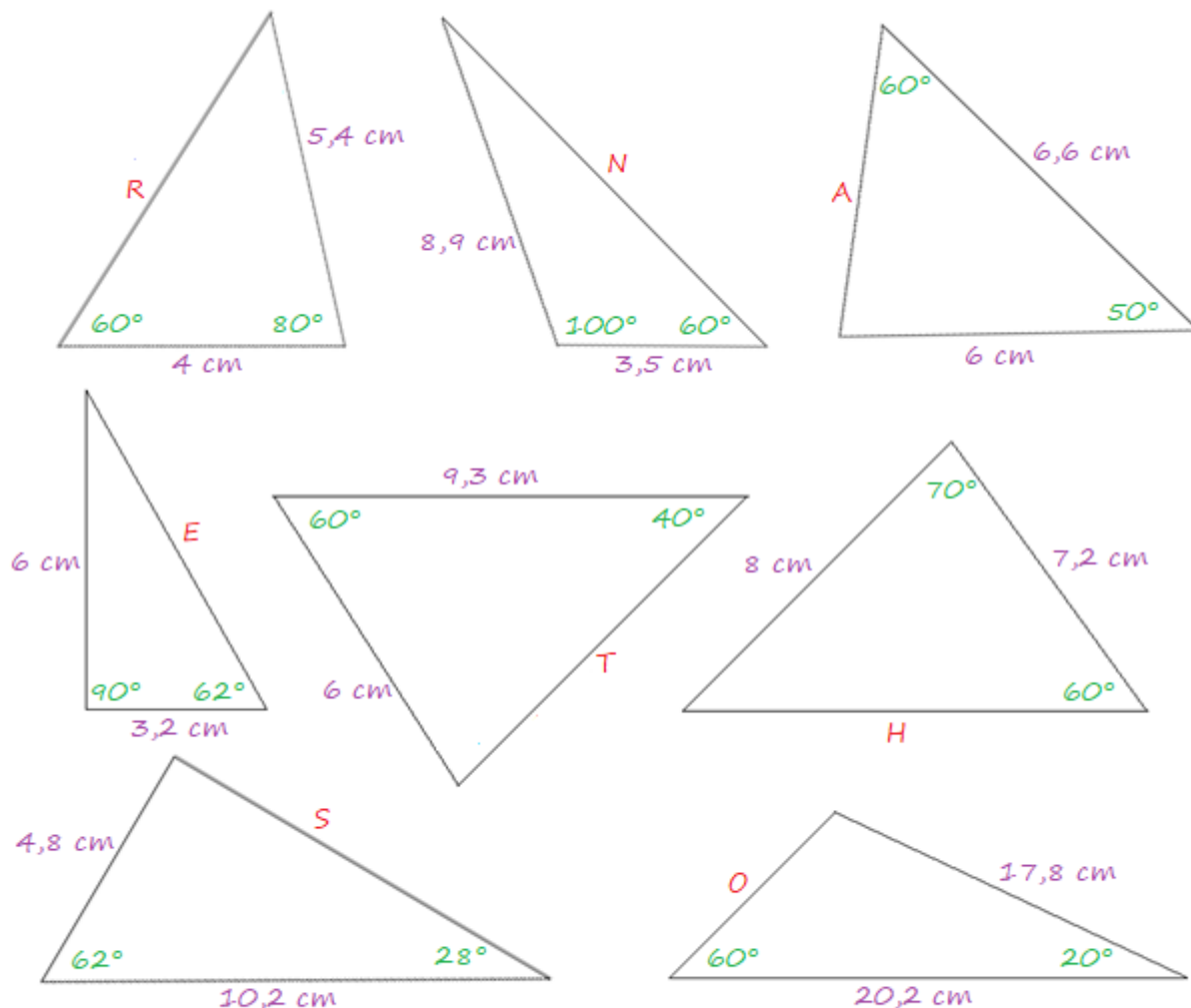
h) $3/4$

l) 0



III. Podobnosť trojuholníkov – PL

1. a) V každom trojuholníku dopočítaj chýbajúci uhol. (obrázky sú ilustračné)
- b) Dvojice navzájom podobných trojuholníkov zvýrazni rovnakou farbou a pomenuj ich (napr. $\triangle ABC$ a $\triangle A'B'C'$).
- c) Podľa viet o podobnosti trojuholníkov, zisti dĺžky strán označené písmenami.



2. Doplň správne písmeno do tajničky podľa vypočítanej dĺžky strany v cvičení 1.

cm (strana)	6,8	6,2	5,4	8,1	7	9	8,1	8,8	6,8	10,1	6,8	9
Písmeno												



Starogrécky matematik,
geograf, historik,
astronóm

(tajnička) v 3. stor.
pred Kr. využil vedomosti
o podobnosti trojuholníkov
a určil s veľmi veľkou
presnosťou obvod Zeme.

<https://www.youtube.com/watch?v=uJ6ynJt9J5o>

